EQUACIÓ D'ONA

Equacions de Maxwell

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Medi no conductor i sense càrregues lliures $\longrightarrow$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{D} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

FIBRA ÒPTICA

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}$$
$$c = \left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\longrightarrow$ **Medi no magnètic**

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$
$$c = \left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

E, H: vectors de camp elèctric i magnètic
D, B: densitat de flux elèctric i magnètic
P, M: densitat de polarització i de magnetització

ε_0, μ_0: permissibilitat elèctrica i permeabilitat magnètica del buit
c: velocitat de la llum en el buit

Equació d'ona en el buit

$$\vec{P} = 0$$
$$\vec{M} = 0$$
$$\vec{J}_f = 0$$
$$\rho_f = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \longrightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\nabla\times\vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{E} = 0$$
$$\nabla\cdot\vec{H} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$
$$c = \left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\times\nabla\times\psi = -\nabla(\nabla\cdot\psi) - \nabla^2\psi$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

J_f: distribució de corrents
ρ_f: densitat de càrregues lliures

Equació d'ona en un medi lineal, no dispersiu, homogeni i isotròpic

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$
$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1+\chi)$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

χ: susceptibilitat elèctrica (escalar)
ε: permissibilitat elèctrica del medi
n: índex de refracció del medi

$$v = \left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$v = \frac{c}{n} \rightarrow n = \frac{c}{v} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+\chi)^{\frac{1}{2}}$$

Medi no homogeni

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi(r)\vec{E}$$

En un medi no homogeni tant la susceptibilitat com la permissibilitat elèctriques depenen de la posició (per tant, també l'índex de refracció)

Medi anisotròpic

$$P_i = \sum_j \varepsilon_0\chi_{ij}E_j$$

χ_{ij}: tensor de susceptibilitat

En un medi anisotròpic, la relació entre els vectors de camp i de densitat de polarització elèctrics depèn de la direcció del primer i no tenen perquè ser paral·lels

Medi dispersiu

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0\int_{\infty}^{\infty}\chi(t-t')\cdot\vec{E}(t')dt'$$

$\varepsilon_0\chi(t)$: resposta impulsional

En un medi dispersiu, la relació entre els vectors de camp i de densitat de polarització elèctrics és dinàmica (amb "memòria") enlloc d'instantània

Medi no lineal

$$\vec{P} = \varepsilon_0\left(\chi^{(1)}\vec{E} + \chi^{(2)}\vec{E}^2 + \chi^{(3)}\vec{E}^3 + \ldots\right)$$

$\chi^{(i)}$: coeficient no lineal d'ordre i

En un medi no lineal, la relació entre els vectors de camp i de densitat de polarització elèctrics és no lineal

Equació d'ona en fibres òptiques

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}$$

Medi isotròpic i lineal
(lluny de les ressonàncies)

$$\vec{P}(r,t) = \varepsilon_0\int_{\infty}^{\infty}\chi(r,t-t')\cdot\vec{E}(r,t')dt'$$

$$\vec{P}(r,t) = \varepsilon_0\left[\chi(r,t'-t) * \vec{E}(r,t)\right]$$

Transformada de Fourier

$$\tilde{E}(r,\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}(r,t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\tilde{P}(r,\omega) = \varepsilon_0\tilde{\chi}(r,\omega)\tilde{E}(r,\omega)$$

$$\nabla\times\nabla\times\tilde{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{E} - \mu_0\omega^2\tilde{P} = -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{E}(1+\tilde{\chi}) = -\frac{\omega^2}{v^2}\tilde{E}$$

$$\chi = \chi' + j\chi''$$

$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c} \to k = \frac{\omega}{v} = \omega(\varepsilon\mu_0)^{\frac{1}{2}} = k_0(1+\chi)^{\frac{1}{2}} \equiv \beta - j\frac{1}{2}\alpha$$

$$U = A\exp(-jkz) = A\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha z\right)\exp(-j\beta z)$$

Ona Plana
Propagació z

n: índex de refracció

α: coeficient d'absorció

$$\alpha << n$$

$$k_0(1+\chi)^{\frac{1}{2}} = \beta - j\frac{1}{2}\alpha = k_0 n - j\frac{1}{2}\alpha \to (1+\chi)^{\frac{1}{2}} = n - j\frac{1}{2k_0}\alpha$$

$$\beta = k_0 n$$

$$n \approx (1+\chi')^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha \approx -\frac{k_0}{n}\chi''$$

Medi amb absorció reduïda

Índex de Refracció independent de r (SI)

$$\nabla\times\nabla\times\tilde{E} = -\nabla(\nabla\cdot\tilde{E}) - \nabla^2\tilde{E} = -\nabla^2\tilde{E}$$

Equació de Helmholtz

$$\boxed{\nabla^2\tilde{E} + n^2(\omega)k_0^2\tilde{E} = 0}$$

$$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

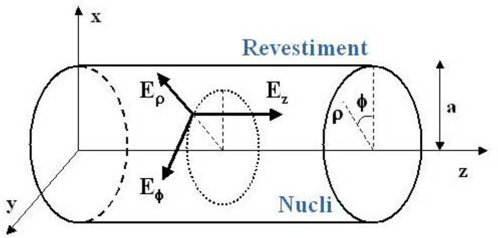
k: número d'ona

β: constant de propagació

Cada component dels camps Elèctric i Magnètic satisfan aquesta equació d'ona

Modes de Propagació Transversals

"Un Mode Òptic fa referència a una solució específica de l'equació d'ona que satisfà les apropiades condicions de contorn i que té la propietat de que la seva distribució espacial no canvia amb la propagació"



Operador Laplaciana en coordenades cartesianes i cilíndriques

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$

Equació de Helmholtz

$$\nabla^2 E_Z + n^2k_0^2E_Z = 0$$

Separació de Variables

Propagació z

Periodicitat φ

$$\boxed{E_Z(\rho,\phi,z) = F(\rho)\Phi(\phi)Z(z) = F(\rho)e^{-jm\phi}e^{-j\beta z}}$$

Modes de Propagació en Fibres de Salt d'Índex

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & \rho < a \\ n_2 & \rho \geq a \end{cases}$$

$$\kappa^2 \equiv n_1^2k_0^2 - \beta^2$$

$$\gamma^2 \equiv \beta^2 - n_2^2k_0^2$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)F = 0 \quad \rho < a \quad \text{Nucli}$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\rho} + \left(\gamma^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)F = 0 \quad \rho \geq a \quad \text{Rev.}$$

Excloem les solucions que es fan ∞ a r=0 o que no s'anul·len quan r→ ∞

$$E_Z(\rho) = \begin{cases} A\cdot J_m(\kappa\rho)e^{-jm\phi}e^{-j\beta z} & \rho \leq a \\ C\cdot K_m(\gamma\rho)e^{-jm\phi}e^{-j\beta z} & \rho > a \end{cases}$$

$$H_Z(\rho) = \begin{cases} B\cdot J_m(\kappa\rho)e^{-jm\phi}e^{-j\beta z} & \rho \leq a \\ D\cdot K_m(\gamma\rho)e^{-jm\phi}e^{-j\beta z} & \rho > a \end{cases}$$

$$E_\rho = -\frac{j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial E_Z}{\partial\rho} + \mu_0\frac{\omega}{\rho}\frac{\partial H_Z}{\partial\phi}\right]$$

$$E_\phi = -\frac{j}{\kappa^2}\left[\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E_Z}{\partial\phi} - \mu_0\omega\frac{\partial H_Z}{\partial\rho}\right]$$

$$H_\rho = -\frac{j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial H_Z}{\partial\rho} - \varepsilon_0 n^2\frac{\omega}{\rho}\frac{\partial E_Z}{\partial\phi}\right]$$

$$H_\phi = -\frac{j}{\kappa^2}\left[\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial H_Z}{\partial\phi} + \varepsilon_0 n^2\omega\frac{\partial E_Z}{\partial\rho}\right]$$

$J_m(\cdot)$, $K_m(\cdot)$: Funcions de Bessel de 1ª espècie i 2ª espècie modificada, d'ordre m

Condicions de Contorn

Les condicions de contorn ens imposen que les components tangencials (ϕ i z) dels camps E i H han de coincidir en la superfície de separació nucli-revestiment. Tenim 4 equacions (**Eρ, Eϕ, Hρ i Hϕ**) i 4 incògnites (**A,B,C i D**). Tindrem una solució diferent de la trivial quan el determinant de la matriu de coeficients s'anul·li.

Equació del Valor Propi

$$\left[\frac{J_m'(\kappa a)}{\kappa J_m(\kappa a)}+\frac{K_m'(\gamma a)}{\gamma K_m(\gamma a)}\right]\left[\frac{J_m'(\kappa a)}{\kappa J_m(\kappa a)}+\frac{n_2^2}{n_1^2}\frac{K_m'(\gamma a)}{\gamma K_m(\gamma a)}\right]=\left[\frac{2m\beta(n_1-n_2)}{a\kappa^2\gamma^2}\right]^2$$

Per a cada valor de **m** ens queda un sistema d'equacions amb múltiples solucions d'on podem aïllar el valor de β_{mn} que determina la condició de propagació (**mode de propagació**).

Condició de Propagació

$$K_m(\gamma\rho)\xrightarrow{\gamma\rho\to\infty}e^{-\gamma\rho}\to\gamma>0\to\beta\le k_2$$

$$F \text{ real}\to\kappa \text{ real}\to k_1\ge\beta$$

$$n_2k_0<\beta<n_1k_0$$

$$n_2<\frac{\beta}{k_0}\equiv\bar{n}<n_1$$

cutoff

$$\beta=n_2k_0\ \to\ \gamma=0$$

$$\beta=n_1k_0\ \to\ \kappa=0$$

$$\bar{n}=n_2\to\kappa=k_0\left(n_1^2-n_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\equiv V$$

$$\bar{n}=n_1\to\kappa=0$$

$\bar{n}$: índex de mode (índex efectiu)

Freqüència Normalitzada

$$\kappa^2+\gamma^2=\left(n_1^2-n_2^2\right)k_0^2=NA^2k_0^2$$

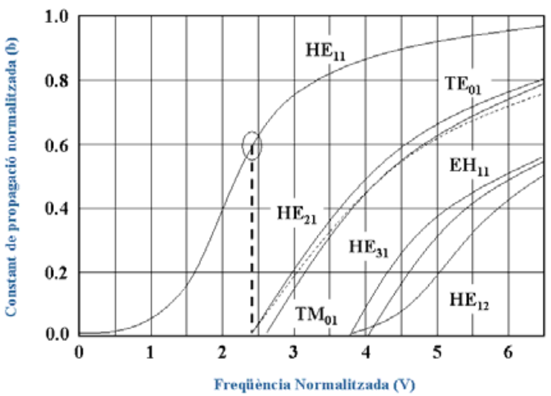
$$X\equiv\kappa a\quad Y\equiv\gamma a$$

$$X^2+Y^2=\left(2\pi\frac{a}{\lambda}NA\right)^2=V^2\quad\longrightarrow\quad\boxed{V\equiv2\pi\frac{a}{\lambda}NA\approx2\pi\frac{a}{\lambda}n_1\sqrt{2\Delta}}$$

$n_1\approx n_2$

Constant de propagació normalitzada

$$b\equiv\frac{\bar{n}-n_2}{n_1-n_2}=\frac{\beta/k_0-n_2}{n_1-n_2}$$



Condició mono-mode

$$J_0(\kappa a)\big|_{\gamma=0}=J_0(V)=0$$

$$\boxed{V<2.405=V_c}$$

Compromís

$$V\downarrow\to \text{monomode}\uparrow$$

$$V\uparrow\to\%P_{nucli}/P_{rev}\uparrow$$

Nombre de modes

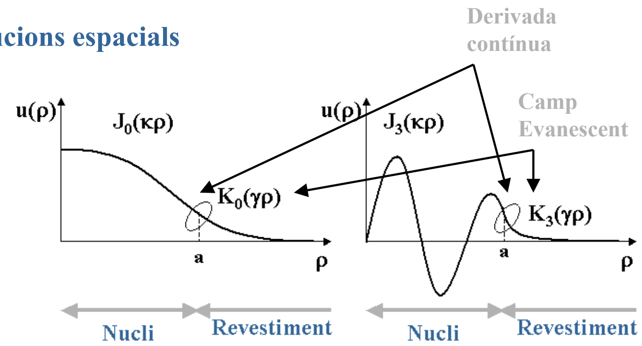
$$M_{SI}\approx\frac{V^2}{2}\quad\longleftarrow\quad\textbf{Fibra de salt d'índex}$$

$$M_{GI}\approx\frac{V^2}{4}\quad\longleftarrow\quad\textbf{Fibra de gradient d'índex}$$

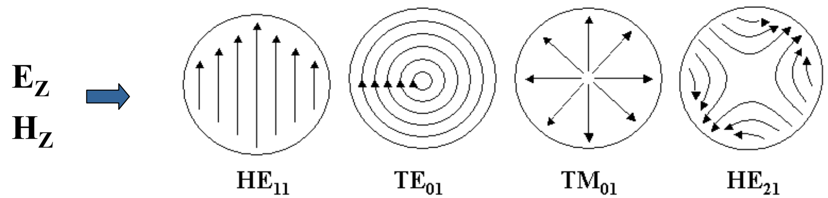
Longitud d'ona de tall

$$\boxed{\lambda_c\approx2\pi\frac{a}{V_c}n_1\sqrt{2\Delta}}$$

Distribucions espacials



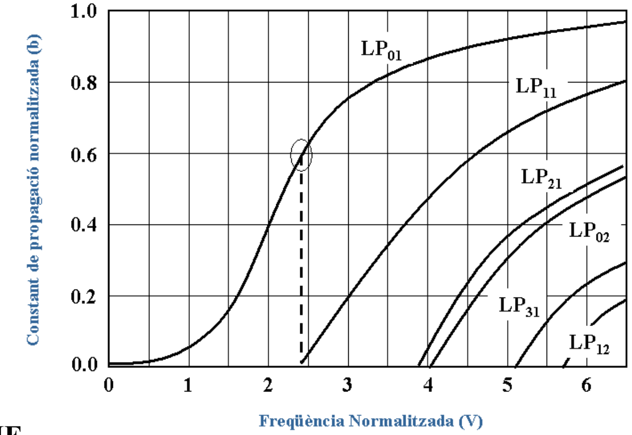
Distribucions de Camp



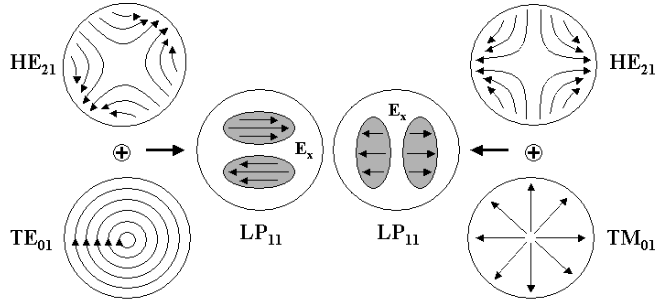
Modes de Polarització Lineal

$\Delta \ll 1$

Òptica Paraxial



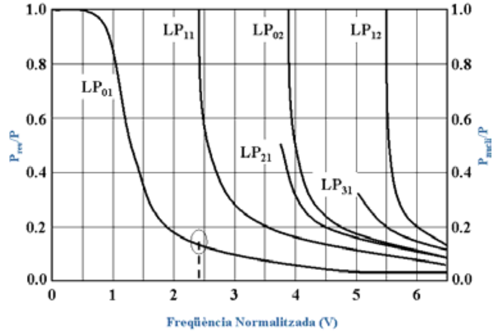
1. LP_{0n} prové de HE_{1n}
2. LP_{1n} prové de TE_{0n}, TM_{0n} i HE_{2n}
3. LP_{mn} ($m \geq 2$) prové de $HE_{m+1,n}$ i $EH_{m-1,n}$



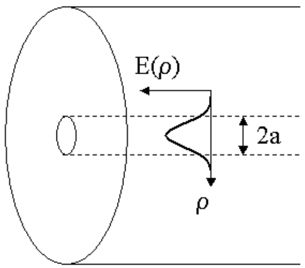
Fracció de Potència Nucli/Revestiment

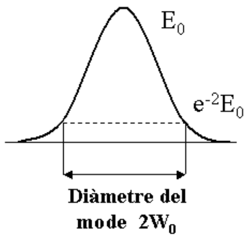
$$\frac{P_{nucli}}{P} = \left(1 - \frac{\kappa^2}{V^2}\right)\left[1 - \frac{J_m^2(\kappa a)}{J_{m+1}(\kappa a) J_{m-1}(\kappa a)}\right]$$

$$\frac{P_{rev}}{P} = 1 - \frac{P_{nucli}}{P}$$



Mode Fonamental

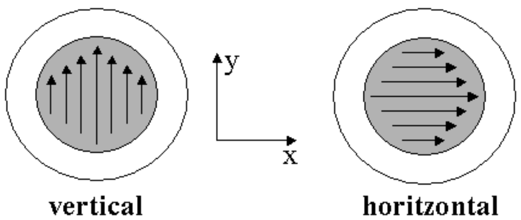




Feix Gaussià

$$E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{W_0}\right)^2\right]$$

Modes de polarització



ATENUACIÓ EN F.O.

Definició

"La llum quan es propaga per la fibra experimenta un decaïment exponencial de la potència òptica amb la distància com a resultat dels fenòmens d'absorció i d'scattering"

Coeficient d'atenuació

$$\alpha = \frac{1}{L} 10 \log(1/T)$$

Unitats: dB/km

$$T \equiv \frac{P(L)}{P(0)}$$

$$\frac{P(L)}{P(0)} = 10^{-\alpha L/10} \approx e^{-0.23\alpha L}$$

$\alpha <<$

L: longitud de la fibra

P(L): potència òptica en L

Absorció del material

"Qualsevol material absorbeix energia a certes longitud d'ona corresponents a ressonàncies electròniques i vibracionals associades a molècules específiques"

Absorció intrínseca
Deguda al propi material (SiO_2)

$\lambda < 0.4\mu m$	Ressonàncies electròniques (ultraviolat)
$\lambda > 7\mu m$	Ressonàncies vibracionals (infraroig)

Absorció extrínseca
Deguda impureses en el material

Metalls	Fe, Cu, Co, Ni, Mn, Cr ...
Vapor d'aigua	OH^+
Dopants	GeO_2, P_2O_5, B_2O_3 ...

Rayleigh Scattering

"Mecanisme fonamental de pèrdues que prové de fluctuacions locals microscòpiques en densitat que porten a fluctuacions aleatòries de l'índex de refracció en una escala inferior a la longitud d'ona"

$$\alpha_R = C/\lambda^4 \qquad C \rightarrow 0.7\text{-}0.9\ (\text{dB/km})\mu m^4$$

Imperfeccions de la guia d'ones (Mie Scattering)

"Mecanisme fonamental de pèrdues que prové d'imperfeccions, comparables a la longitud d'ona, en l'estructura cilíndrica de la guia"

- Irregularitats en l'estructura nucli-revestiment
- Diferències en l'índex de refracció nucli-revestiment
- Fluctuacions del diàmetre del nucli
- Tensions
- Bombolles d'aire

El coeficient d'atenuació depèn de l'absorció i de l'scattering tant en el nucli com en el revestiment. Donat que la penetració en el revestiment depèn del mode, l'absorció també (és major quan més gran és l'ordre del mode). Les fibres momomode tenen menor atenuació.

Pèrdues en curvatures

"Quan part del camp evanescent és forçat a viatjar a una velocitat superior a la de la llum per acció d'una curvatura en la fibra, aquesta energia és radiada cap a l'exterior de la guia"

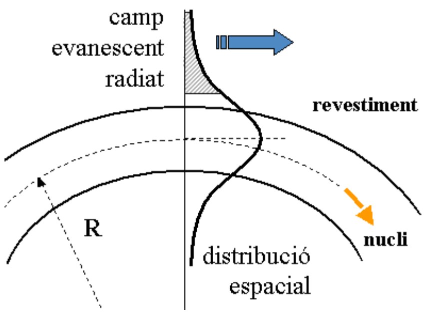
$$\alpha_T = C_1 \exp(-C_2 R)$$

$$R_c\big|_{MM} \approx \frac{3n_1^2\lambda}{4\pi(n_1^2 - n_2^2)^{3/2}}$$

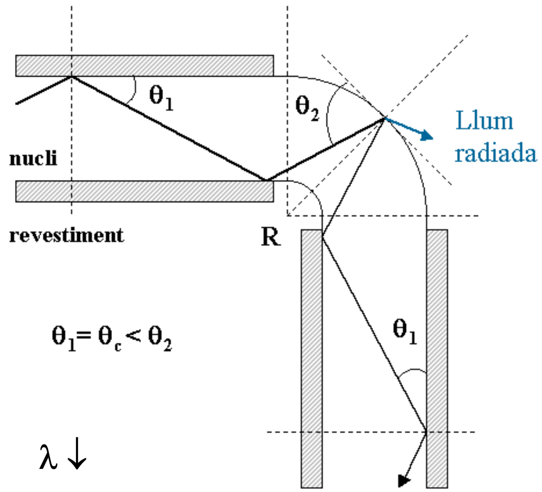
$$R_c\big|_{SM} \approx \frac{20\lambda}{(n_1 - n_2)^{3/2}}\left(2.748 - 0.996\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{-3}$$

R: radi de curvatura

R_c: radi de curvatura crític



Pèrdues en curvatures fent ús de l'òptica de raigs



$$\theta_1 = \theta_c < \theta_2$$

solució → $\lambda \downarrow$ $\Delta \uparrow$

Corba d'atenuació en F.O.