

2 GRÁFICAS EXPERIMENTALES. LINEALIZACIÓN

1 INTRODUCCIÓN

En la primera práctica se ha visto la importancia de las incertidumbres experimentales, su origen y su estimación, habiéndonos limitado al error, o incertidumbre, debido al instrumento de medida. Como no siempre una magnitud se mide directamente, se estudió cómo se *propagan* los errores en el proceso de cálculo y así estimar la incertidumbre del resultado final.

La mayor parte del trabajo experimental supone la medida de diversos valores de dos magnitudes físicas con el fin de verificar u obtener una ley física, es decir la relación matemática entre las dos magnitudes.

Si se trata de obtener una ley física interesa finalmente, y siempre que se pueda, llegar a una expresión que dé la relación entre las dos variables objeto del experimento.

No siempre buscamos una dependencia, o ley, entre las magnitudes; por ejemplo la experiencia puede consistir en el estudio de la variación de la resistencia eléctrica de un conductor con la temperatura, $R(t_C)$, donde t_C sería la temperatura Celsius del conductor, y se procura mantener constante cualquier otra magnitud que pueda alterar estas dos. Podemos conocer que la resistencia, que es objeto de nuestro estudio, varía linealmente con la temperatura, pero desconocer el coeficiente de proporcionalidad, es decir cuántos ohmios varía la resistencia al variar un grado la temperatura de la misma; su conocimiento nos permitiría diseñar un termómetro para una experiencia, si éste fuera nuestro objetivo planeáramos el trabajo de la siguiente manera, primeramente:

- comprobar si se cumple la ley prevista, en este caso la variación lineal, $R = at_C + b$, y, si se cumple,
- determinar algún parámetro, en este caso a y b

En resumen, se pueden plantear dos objetivos distintos:

- La búsqueda de una ley que ligue los valores entre dos magnitudes
- La comprobación de que nuestros datos satisfacen un comportamiento teórico, con algunos parámetros inicialmente desconocidos y que pretendemos determinar.

La mejor forma de cumplir con cualquiera de los dos objetivos es poder llegar a expresar dicha ley como una relación lineal entre dos nuevas magnitudes, obtenidas a partir de las originales, ya que una línea recta se reconoce fácilmente. El objetivo de esta práctica consiste en poder llegar a trazar esa recta, partiendo de la tabla de datos experimentales, dando énfasis especial al segundo de los objetivos.

2 GRÁFICAS EXPERIMENTALES

Los datos experimentales se recogen en forma de tabla. La tabla 1 muestra el conjunto de valores obtenidos en el ejemplo anterior.

Tabla 1.-Valores medidos de la resistencia de un material conductor a distintas temperaturas

$t_C/^\circ\text{C}$	8	14	24	32	45	52	64
R/Ω	104,3	105,5	108,4	112,5	116,0	120,2	124,0

Observe que en la primera columna se han colocado los símbolos de las magnitudes y las unidades en las que vienen medidas, de tal forma que en el resto de columnas se escriben simplemente números.

Pasar de la tabla de datos a una gráfica en la que representamos los puntos experimentales (x_i, y_i) , (t_{Ci}, R_i) en el ejemplo, constituye, para empezar, una ayuda visual. La observación del conjunto de puntos representados nos permitirá, en general:

- ver si se agrupan alrededor de alguna curva
- ver si dicha agrupación es muy compacta ó muy dispersa.
- ver si la curva es monótona creciente, decreciente, con uno o varios máximos y/o mínimos, si la curva es periódica, etc..
- detectar las medidas que pueden ser erróneas (normalmente entre los puntos que están muy alejadas de la nube)
- extrapolar las medidas fuera del conjunto, prolongando la curva a derecha e izquierda.
- interpolar fácilmente dentro de la curva.

La gráfica nos permitirá, en ocasiones, obtener la expresión analítica de la recta de ajuste. Para trazar la gráfica parece conveniente adquirir primero una cierta soltura en la realización manual para, después, pasar al ordenador. Así, la primera representación de una tabla de datos la realizará en papel milimetrado.

Enumeramos a continuación una serie de recomendaciones para el tratamiento gráfico de los resultados experimentales.

- a) la variable independiente, la que se puede controlar con más facilidad en el laboratorio, suele emplearse como abscisa.
- b) se mejora la resolución si se utiliza en la representación la mayor parte posible de la hoja sobre la que dibujamos; así la inclusión del punto (0, 0) puede no ser conveniente, la ubicación del origen *desplazado* estará en el cruce de los ejes de coordenadas próximo al punto definido por los valores mínimos de las coordenadas experimentales.
- c) las escalas se eligen de tal manera que los puntos queden lo más espaciados que se pueda; las divisiones en las escalas deben corresponder a números simples. Esto facilita la colocación de los puntos y su lectura posterior.
- d) los ejes deben etiquetarse con el nombre de la magnitud y la unidad empleada.
- e) los puntos se indican con cruces, círculos, rectángulos ..., y no con señales puntuales ya que éstas pueden ser *pisadas* por la curva de ajuste.

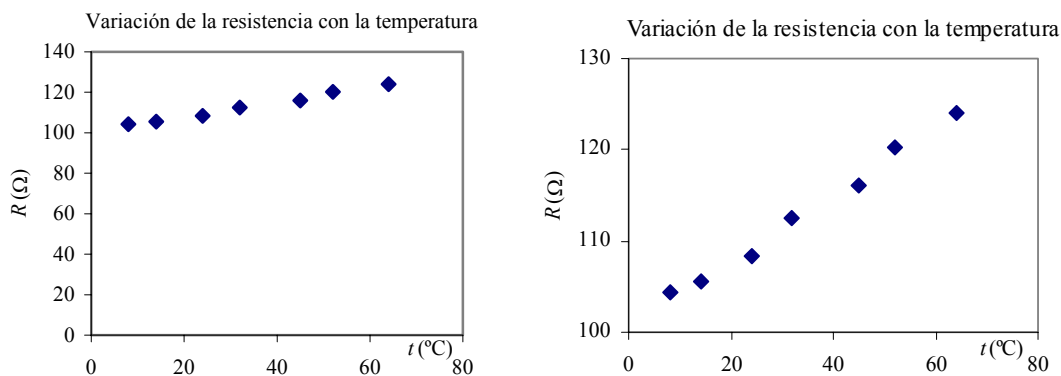


fig 1 En la gráfica de la derecha se ha cambiado el origen pasándolo del punto (0, 0) al (0, 100). Este cambio ha permitido ampliar la escala del eje vertical, manteniendo el tamaño de la figura.

- f) siempre que el fenómeno estudiado no tenga discontinuidades, los puntos se pueden unir entre sí mediante una línea curva suave; no es recomendable hacerlo mediante una línea quebrada cuyos vértices corresponden a los puntos experimentales. Si alguno de los puntos es un obstáculo para la definición de dicha curva es probable que se haya cometido algún error en sus medidas o en la transcripción, en este caso es recomendable repetir la medida asociada al mismo.
- g) podemos representar gráficamente el error cometido en cada medida puntual mediante una cruz ubicada en cada punto experimental, tal que la longitud de sus brazos sea igual al valor, a escala, del error absoluto de la medida. Esta cruz delimita un espacio rectangular alrededor de cada punto experimental y cuando se trace la curva de ajuste ésta debe cruzar dicho espacio.

En la figura 2 se incluyen las barras de error. Se han determinado sabiendo que se ha medido la temperatura con un termómetro calibrado en grados y la resistencia del material conductor con un polímetro de tres dígitos y medio, cuyo error no supera al 1% de la lectura más dos dígitos.

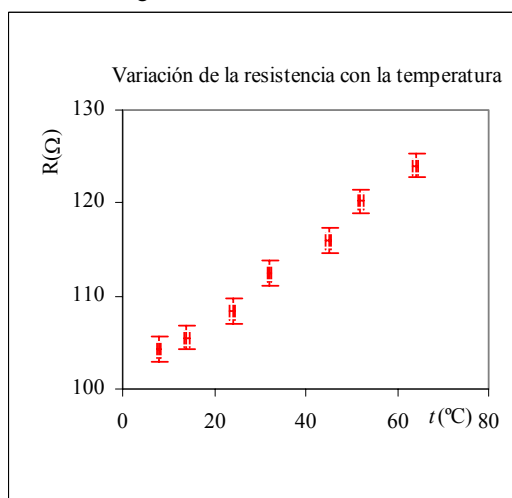


fig 2. Se representan los puntos experimentales con las barras de error ($t_i \pm \Delta t_i$, $R_i \pm \Delta R_i$) y la recta de ajuste

3 DATOS QUE SE AGRUPAN ALREDEDOR DE UNA RECTA

Si el conjunto de N puntos experimentales (x_i, y_i) ($i = 1$ a N), se agrupa en el plano (x, y) alrededor de una recta, la relación entre x y y puede ajustarse mediante una función lineal del tipo $y = mx + b$, donde m y b son los parámetros a determinar. El parámetro m es el *cociente incremental*: $m = \Delta y / \Delta x$ y el b es la ordenada en el origen $b = y(0)$.

Hay que destacar que el valor de m es el cociente entre los incrementos de dos magnitudes físicas, por ejemplo voltios y amperios, y, por lo tanto, no será, en general, una magnitud adimensional, en consecuencia, su valor no depende de las escalas que se utilicen en cada uno de los ejes. En adelante, nos referiremos a este parámetro m , habitualmente, como pendiente de la recta, abusando del lenguaje.

Si x y y están relacionadas por la función lineal $y = mx + b$, y medimos los $2N$ valores (x_i, y_i) representándolos en una gráfica con y en ordenadas y x en abscisas, cada uno de los N puntos estaría exactamente sobre la recta $y = mx + b$, siempre que los datos no tuvieran incertidumbre alguna. En la realidad siempre hay errores en los datos y lo que pretendemos es que la distancia de cada punto (x_i, y_i) a la recta se pueda comparar razonablemente con la incertidumbre en la posición del punto.

Así, cuando tenemos el conjunto de los N puntos experimentales (x_i, y_i) lo primero es estimar si realmente puede existir una relación lineal entre las dos variables. Si asumimos que existe, el problema es determinar las constantes m y b de tal manera que la recta $y = mx + b$ sea la que mejor encaje con los puntos experimentales (x_i, y_i) .

Podemos determinar los coeficientes m y b mediante diversos procedimientos:

- a) Dibujar, a ojo, la *mejor* recta que ajuste a los puntos experimentales
- b) Determinar analíticamente, a partir de un ajuste por mínimos cuadrados, la llamada *recta de regresión*

El procedimiento a) se hará manualmente, mientras que el b) se llevará a cabo con una hoja de cálculo

3.1.- Ajuste manual

Una vez representados los puntos experimentales siguiendo las pautas anteriores se dibuja la *mejor* recta que ajuste a los puntos experimentales y, a continuación se procede al cálculo de la pendiente, de la ordenada en el origen y a la estimación de sus incertidumbres.

Una primera estimación de las constantes m y b se puede hacer directamente sobre la *mejor* recta. Sobre esta recta se elige una pareja de puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ ubicados cerca de los extremos de la *mejor* recta que hemos dibujado. Dichos puntos no tienen que coincidir necesariamente con puntos experimentales. Podemos calcular el cociente incremental m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la figura 3.1 se han representado los puntos del ejemplo, con sus rectángulos de error. Tomando los puntos $P(0, 101)$ y $Q(60, 123)$, de la *mejor* recta, podemos calcular m :

$$m = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{123 - 101}{60 - 0} = 0,36 \Omega / K$$

la ordenada en origen se lee directamente en la gráfica: $b = R(t = 0^\circ\text{C}) = 101 \Omega$

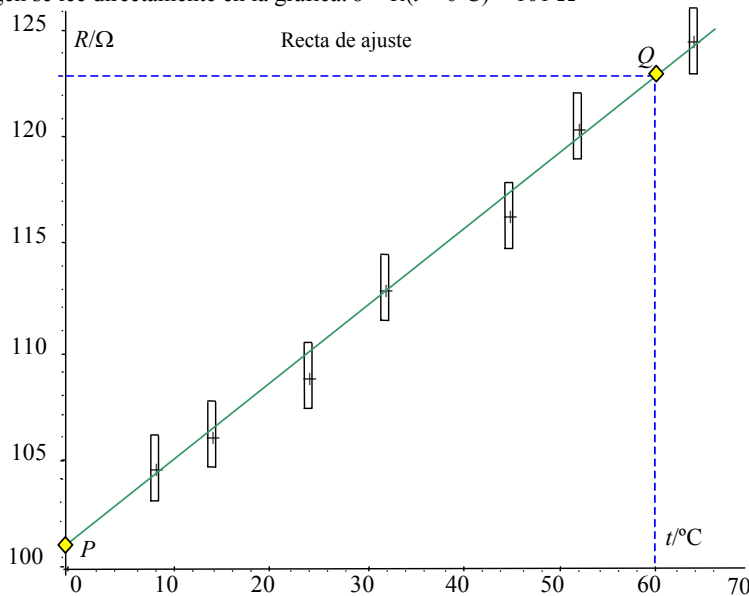


fig 3.1. Los rectángulos representan los puntos experimentales con sus errores ($x_i \pm \Delta x_i, y_i \pm \Delta y_i$) y se ha trazado la *mejor* recta de ajuste, sobre ella se han tomado los puntos P y Q

3.1.1.- Cálculo de la pendiente y de su incertidumbre

Cuando conocemos los rectángulos de error de las medidas y sabemos que la relación entre las variables experimentales es lineal se pueden calcular los márgenes de error de los parámetros de ajuste $m \pm \Delta m$ y $b \pm \Delta b$. Para determinar gráficamente estas magnitudes, en primer lugar se dibuja la recta que corta a todos los rectángulos asociados a los puntos experimentales y tiene la máxima pendiente, m_{\max} , figura 3.2, seguimos con el dibujo de la recta que cortando también a todos los rectángulos mencionados tiene la pendiente mínima, m_{\min} . Sobre cada una de estas rectas se elige una pareja de puntos P y Q y a partir de ellos se obtienen las dos pendientes extremas: m_{\max} y m_{\min}

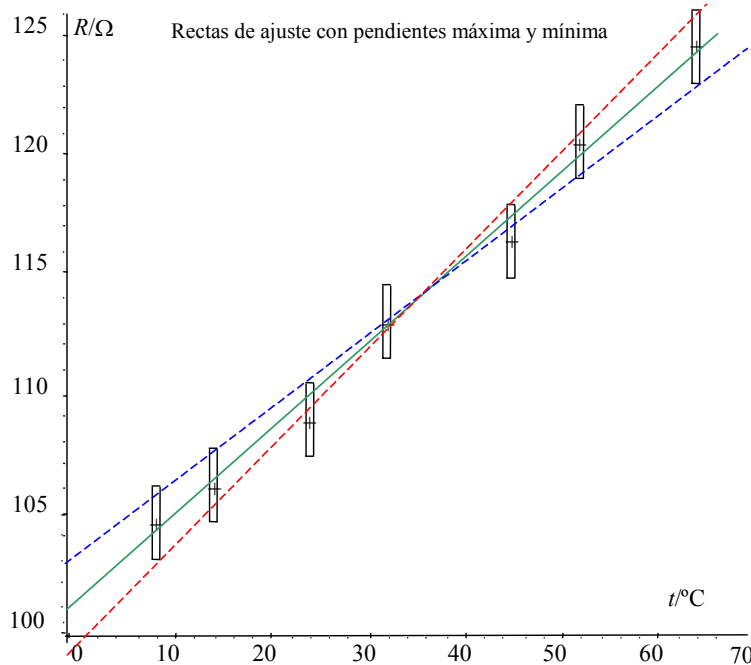


fig 3.2. Rectas de pendientes máxima y mínima que cortan a todos los rectángulos de los puntos experimentales

El valor de la pendiente de la recta de ajuste se puede tomar como el valor medio de m_{\max} y m_{\min} , o aceptar el valor obtenido de la *mejor* recta. El error de m es:

$$\Delta m = \pm (m_{\max} - m_{\min})/2 \tag{2.1}$$

En la recta de máxima pendiente se han tomado los puntos (62, 125) y (1, 100) que proporcionan un valor $m_{\max} = 0,41 \text{ } \Omega/\text{K}$; en la recta estimada como de mínima pendiente se han tomado los puntos (61,5, 122) y (0, 103) que proporcionan un valor $m_{\min} = 0,31 \text{ } \Omega/\text{K}$. Estos valores tienen un valor medio:

$$m = 0,359 \text{ } \Omega/\text{K}$$

y la incertidumbre:

$$\Delta m = \pm (m_{\max} - m_{\min})/2 = \pm 0,05 \text{ } \Omega/\text{K}$$

3.1.2.- Cálculo del error de la ordenada en el origen

Para estimar el error de b debemos diferenciar dos situaciones:

a) los valores de la variable independiente tienen el mismo signo, positivo en el caso mostrado en la figura 4.1, en cuyo caso los valores extremos de b se obtienen por lectura directa o sustituyendo en las respectivas ecuaciones de las rectas de pendientes extremas.

b) el dominio de la variable independiente comprende tanto valores positivos como negativos, figura 4.2, en este caso debemos dibujar dos rectas que cortando a todos los rectángulos de error correspondan a intersecciones extremas (ordenadas b_a y b_b) con el eje de ordenadas.

Determinadas b_a y b_b el error de b es:

$$\Delta b = \pm |b_a - b_b|/2 \tag{2.2}$$

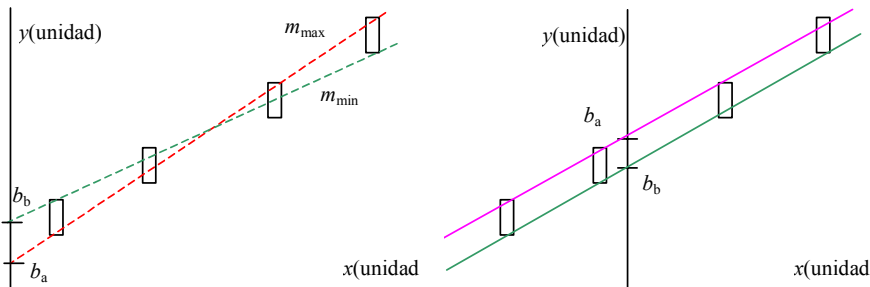


fig 4.1. Estimación del valor de b y su error cuando los valores de la variable independiente tienen el mismo signo
 fig 4.2. Estimación del valor de b y su error cuando los valores de la variable independiente no tienen todos el mismo signo

El ejemplo que vamos siguiendo corresponde a la situación a). La ordenada en el origen asociada a m_{\min} se obtiene por lectura directa, para el cálculo de la pendiente ya hemos tomado el punto $(0, 103)$, por tanto $b_b = 103 \Omega$. La elección que hemos hecho del origen para la gráfica no permite la lectura directa de b_a , como el punto $(1, 100)$ pertenece a la recta de pendiente $m_{\max} = 0,41 \Omega/K$, sustituyendo en la ecuación de la recta se obtiene $b_a = 99,6 \Omega$. El valor medio es $b = 101 \Omega$ y su incertidumbre:

$$\Delta b = \pm |b_a - b_b|/2 = \pm 1,7 \Omega$$

Como final, podemos decir que hemos comprobado que la dependencia de la resistencia del material estudiado con la temperatura es lineal, $R = at_C + b$ con:

$$a = (0,36 \pm 0,05)(\Omega/K) \quad \text{y} \quad b = (101 \pm 2)\Omega$$

3.2.- Ajuste por mínimos cuadrados

La tabla de datos puede introducirse en un ordenador en el que se tenga un programa para calcular m y b por el método de mínimos cuadrados (Puede consultar el apéndice I y/o el archivo: *regressió lineal*, cuya dirección electrónica en la que encontrará este archivo y otros necesarios para la práctica, le será proporcionada por el profesor). Para este ejemplo hemos utilizado una hoja de cálculo EXCEL, que es la que se utilizará en las prácticas. Con ella se ha obtenido la recta de regresión representada en la figura 7; la ecuación de la recta de ajuste y el coeficiente de regresión R^2 .

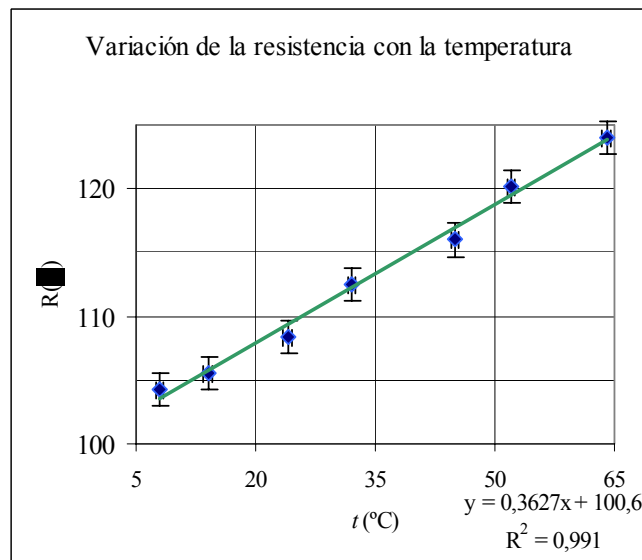


fig. 7 Ajuste de los datos y su representación con Excel

La incertidumbre relativa de la pendiente, calculada a partir del coeficiente de regresión, vale (ver el archivo: *regressió lineal*): $\Delta R/R = 4,3\%$. Tanto para la gráfica como para este cálculo se ha aceptado que la incertidumbre en los valores de la resistencia era la misma para todos los puntos, aceptable si se tiene en cuenta que va de $1,3 \Omega$ a $1,5 \Omega$. El resultado para el coeficiente a es: $(0,36 \pm 0,02)(\Omega/K)$

4 Linealización

Si el modelo teórico establece una relación lineal entre los datos, la representación de los puntos (x_i, y_i) origina la recta de ajuste, pero no siempre van a presentar una relación lineal; sin embargo sigue siendo cierto que lo que podemos reconocer más fácilmente es un ajuste a una recta. Por eso intentaremos convertir la gráfica en lineal. Por ejemplo, si soltamos una bola metálica para que caiga libremente, el espacio recorrido, z , es proporcional al cuadrado del tiempo, t , si representamos (z, t) la gráfica sería una rama parabólica, en cambio si representamos (z, t^2) tendríamos teóricamente una recta. El ajuste de los datos experimentales con la recta teórica nos daría una idea de la bondad de las medidas y la posibilidad de estimar el valor de la gravedad, o interpolar o extrapolar el espacio recorrido para algún valor de t no medido.

En general, si la teoría establece un tipo de función $y(x)$ no lineal, que incluya dos parámetros, se puede realizar una transformación que permita pasar de una manera simple a un ajuste lineal de variables diferentes.

La transformación puede realizarse de forma sencilla con la hoja de cálculo EXCEL. Con las tablas que aparecen en los e-ficheros que se le suministrarán, practicará los casos que se sintetizan en la Tabla 2. Las tres primeras filas son lineales directamente. En la fila siguiente, está la función potencial: $y = ax^b$, cuyo exponente b es conocido y donde sólo hay un parámetro de ajuste. Si b no es conocido la transformación consiste en construir la gráfica $(\log x, \log y)$ para tener una relación lineal.

Una función que aparece en muchas leyes de la física es una función exponencial, $y = ae^{\lambda x}$, si tomamos logaritmos neperianos

$$\ln y = \ln a + \lambda x$$

se consigue linealizar la expresión; donde y no es una función lineal de x , pero sí lo es $\ln y$. Obviamente, también la representación de

$$\log y = \log a + \log e \cdot \lambda x = \log a + 0,434 \lambda x$$

da lugar a una recta y suele ser más cómodo interpretar los parámetros que si se toman logaritmos neperianos. [Era tradicional y cómodo el uso de papel semilogarítmico en el que la graduación en uno de los ejes está espaciada logarítmicamente, de tal manera que la representación de $\log y$ se hace directamente, sin ningún cálculo. El fácil acceso a los ordenadores ha hecho que su uso se vaya abandonando]

Tabla 2.-Tipos de funciones con una recta de ajuste

Tipo de función	Parámetros	Representación, (abscisas, ordenadas)
$y = c = \text{constante}$	c	(x, y)
$y = mx$	m	(x, y)
$y = mx + b$	m, b	(x, y)
$y = ax^b$	a	(x^b, y)
$y = ax^b$	a, b	$(\log x, \log y)$
$y = ae^{\lambda x}$	a, λ	$(x, \log y)$
$y = ax + bx^2$	a, b	$(x, y/x)$

Esta técnica no puede llevarse a cabo si hay más de dos parámetros en la función; por ejemplo en la función $y = a + bx + cx^2$. Las técnicas a emplear en esos casos no las tratamos aquí, ya que van más allá de nuestros objetivos.

Otro problema que aparece, tras la aparente simplicidad, es el siguiente: el cálculo de la recta de regresión se ha hecho suponiendo que todos los valores medidos presentan el mismo error, así $\Delta y_i = \Delta y$, mientras que según la propagación de errores:

$$\Delta(\log y_i) = \left| \frac{d(\log y_i)}{dy_i} \right| \Delta y = \frac{\Delta y}{y_i}$$

el error aumenta cuando y_i se hace menor. Una solución es asignar un *peso estadístico* a cada valor, (el esquema de trabajo puede verlo en el archivo: *regressió lineal*). Con frecuencia la variación de los errores es pequeña y no tendríamos grandes diferencias entre la aplicación directa o la aplicación con *pesos*. Lo que obtengamos si no *mejor* sí dará una estimación razonable de a y λ (de a y b en el caso potencial).

5 REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA

El objetivo de esta práctica es:

La comprobación de que unos datos experimentales satisfacen (o no) un comportamiento teórico, con algunos parámetros inicialmente desconocidos y que pretendemos determinar.

La mejor forma de cumplir con este objetivo es poder llegar a que una magnitud, y , varíe linealmente con otra, x , ya que una línea recta se reconoce fácilmente. Este trabajo lo realizará, fundamentalmente, con la aplicación EXCEL, por lo que es necesario que se familiarice con la construcción de gráficas que presenta esta hoja de cálculo. Así, la realización de esta parte de la práctica se ha dividido en dos fases: una en casa y otra en el laboratorio.

5.1 EJERCICIOS PREVIOS OBLIGATORIOS:

Lea el archivo **A-representació** (la dirección electrónica en la que encontrará este archivo y los siguientes le será proporcionada por el profesor)

Acceda al archivo **B-ajust lineal**; y lea las instrucciones generales

Este archivo tiene además tiene un conjunto de hojas con ejercicios, en cada ejercicio se da una tabla de valores experimentales que se supone cumplen una ley física cuya formulación matemática es conocida:

- En las etiquetadas con “1”, la ley es de proporcionalidad.
- En las etiquetadas con “2” la relación entre las dos magnitudes es presuntamente lineal.

Ejercite su manejo de las gráficas con EXCEL con un ejemplo de cada grupo (por lo menos).

Al llegar al laboratorio para la realización de la Práctica 2 **deberá traer**:

La gráfica correspondiente a una de los ejercicios tipo “2”, representada manualmente en papel cuadriculado (o mejor milimetrado, si está a su alcance)

- **dibujará en ella: la mejor recta, la de pendiente máxima y la de pendiente mínima**
- **determinará la pendiente con su incertidumbre y la ordenada en el origen con su incertidumbre**

En el archivo **C-linealització I** se dan detalles de linealización de datos que deben cumplir una ley no lineal conocida. Tras su lectura:

elija uno de los ejercicios entre los etiquetados con “4”, “5” o “6”, realícelo con atención e imprima su resultado, junto con la tabla, para traerlo al laboratorio

5.2 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1.- Se sabe que el periodo T de un oscilador eléctrico es proporcional a la raíz cuadrada de la capacidad C . Se hace una tabla experimental de T en función de C . ¿Qué otras magnitudes derivadas de T y C deben asignarse a los ejes de una gráfica en papel milimetrado para que la nube de puntos se linealice?

2.- En el caso anterior, ¿qué tipo de representación escogerá para que la gráfica se linealice directamente? (sin necesidad de realizar una transformación específica)

3.- En una hoja EXCEL construya tablas de las funciones $y = Ax^N$, donde $A = 1$ y donde $N = -2, -1, 0, 1$ y 2 y represente las tablas. Represente también $\log y$ en función de $\log x$ para los mismos valores. Compare los resultados.

$N =$

x	$y = x^N$	$\log(x)$	$\log(x^N)$
-----	-----------	-----------	-------------

4.- En una hoja EXCEL construya tablas de las funciones $y = A \exp(-t/\tau)$ donde $A = 10$, t va desde $t = 0$ a 100 s y τ tiene los valores: 1, 2, 4 y 8 y represente las tablas. Represente también $\log y$ en función de t para los mismos valores. Compare las gráficas.

5.- En una cierta experiencia, y mediante un proceso de ajuste, se obtiene la expresión $\log V = 8 + 3 \log x$, escriba la expresión no lineal que relaciona V con x . Repita el ejercicio para la expresión $\log v = 4 - 0,25t$.

5.3 EJERCICIOS EN EL LABORATORIO OPERATIVA

A. Realizar en el ordenador del laboratorio una gráfica lineal

(B- *ajust lineal* , a elegir entre 1 , 2 y 3)

- No hace falta imprimir. Debe mostrar la gráfica al profesor.

B. Linealizar, con el ordenador, una relación sencilla y conocida (con un sólo parámetro) distinta de la realizada en casa

(C- *linealització I* , a elegir entre 4, 5 , 6 y 7)

- Imprima la gráfica, e interprete los resultados

C. Linealizar, con el ordenador , una relación sencilla y conocida (con dos parámetros)

(D- *linealització I* , a elegir entre 10, 11 ,12, 13 y 15)

- Imprima la gráfica, e interprete los resultados

D. Tratamiento de funciones exponenciales , del tipo: $A = A_0 \exp(-t/\tau)$

(D- *linealització II* , elegir una del tipo 17)

- En la hoja de cálculo debe realizar:
 - i. La representación directa de los puntos $A(t)$
 - ii. El cálculo del logaritmo y la representación linealizada, obteniendo por regresión los coeficientes A_0 y τ
- Una vez impresas ambas gráficas, se analizarán sobre el papel las propiedades de la función exponencial, determinando manualmente la constante τ , sobre la gráfica, por dos métodos:
 - i. Teniendo en cuenta que la relación entre $A(t)$ y $A(t + \tau)$ es e (base de los logaritmos neperianos). Determine el intervalo $\Delta t = \tau$ que hay que *esperar* para que A se reduzca e veces.
 - ii. Sabiendo que la relación entre A y dA/dt es igual a e : trace, en un determinado punto P de la curva, una tangente a ella y observe el punto Q en que corta al eje de abscisas. Calcule $\tau = |t_Q - t_P|$
- Compare los valores de τ obtenidos manualmente y con el ajuste

Hoja de respuestas

No hay hoja de respuestas en esta práctica. Entregará las gráficas, con sus tablas correspondientes, que se piden en el trabajo previo (individual) y en la operativa (trabajo de equipo).

En el mismo papel escribirá cualquier otra información adicional.

No olvide escribir nombre/nombres y grupo/equipo de laboratorio en cada hoja.