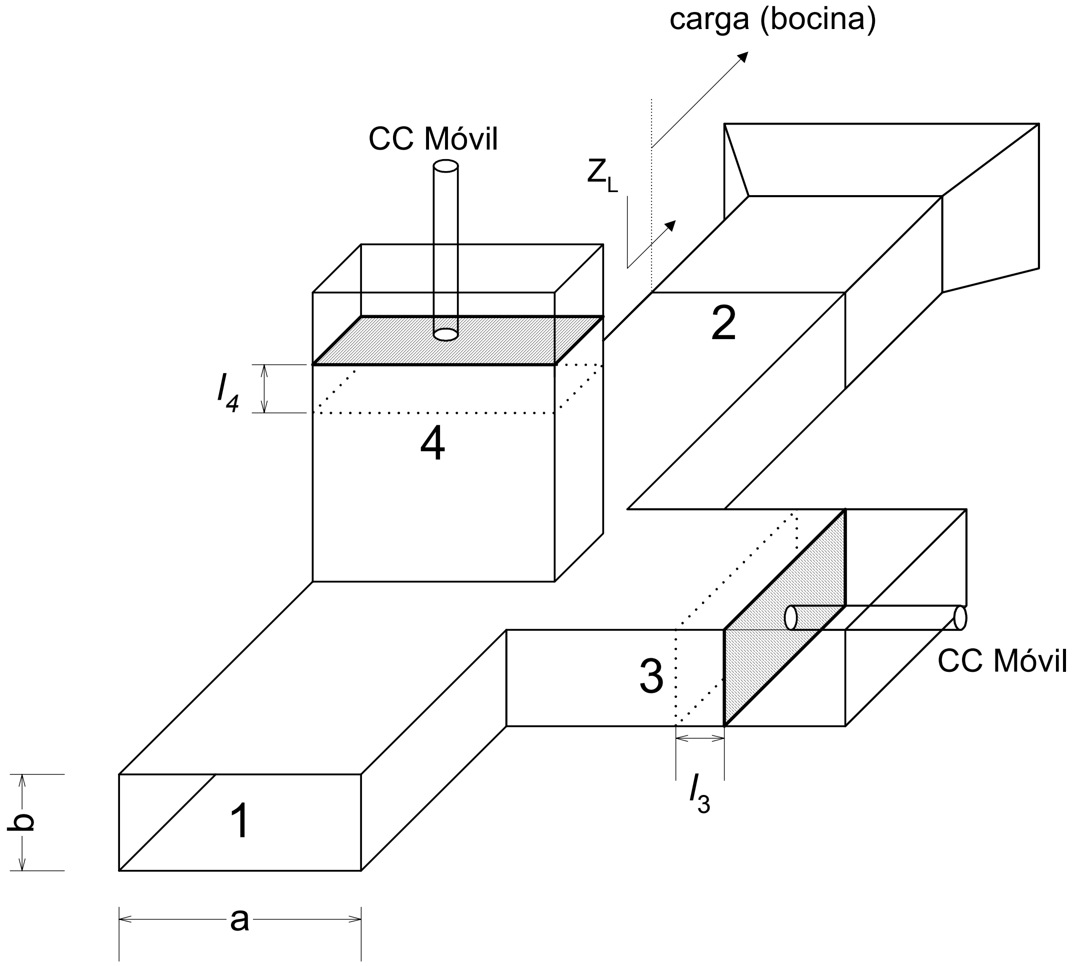
ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIA CON T MÁGICA

Supongamos que en la puerta 1 se conecta un generador canónico. En la la puerta 2 se conecta la impedancia que se quiere adaptar. Esta puede ser una bocina de coeficiente de reflexión Γ. En las puertas 3 y 4 se conectan cortocircuitos de longitud ajustable ℓ_3 y ℓ_4:



Vamos a ver que para cualquier coeficiente de reflexión Γ siempre existen dos posiciones de los cortocircuitos que hacen que el generador esté adaptado.

Por la puerta 1 entra la señal proveniente de generador a_1. Por las otras tres puertas las señales de entrada son:

$$a_2 = \Gamma b_2$$
$$a_3 = \Gamma_3 b_3$$
$$a_4 = \Gamma_4 b_4$$

siendo Γ_3 y Γ_4 los coeficientes de reflexión que presentan los cortocircuitos móviles:

$$\Gamma_3 = -e^{-j2\beta\ell_3} = e^{j\phi_3}$$
$$\Gamma_4 = -e^{-j2\beta\ell_4} = e^{j\phi_4}$$

Las señales de salida por las cuatro puertas serán:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \Gamma b_2 \\ \Gamma_3 b_3 \\ \Gamma_4 b_4 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la matriz quedan:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Gamma_3 b_3 + \Gamma_4 b_4 \right)$$
$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Gamma_3 b_3 - \Gamma_4 b_4 \right)$$
$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1 + \Gamma b_2 \right)$$
$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1 - \Gamma b_2 \right)$$

Sustituimos la tercera y la cuarta en la primera y segunda:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Gamma_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 + \Gamma b_2\right)\right) + \Gamma_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 - \Gamma b_2\right)\right)\right]$$
$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Gamma_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 + \Gamma b_2\right)\right) - \Gamma_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 - \Gamma b_2\right)\right)\right]$$

Y arreglándolo un poco:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[a_1\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right) + \Gamma b_2\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right)\right]$$
$$b_2 = \frac{1}{2}\left[a_1\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right) + \Gamma b_2\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)\right]$$

Despejamos b_2 en la segunda:

$$b_2 = \frac{a_1\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right)}{2 - \Gamma\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)}$$

Y sustituimos en la primera:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left[a_1\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right) + \Gamma \frac{a_1\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right)}{2 - \Gamma\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)}\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right)\right]$$

Entonces, el coeficiente de reflexión en la puerta 1:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{2}\left[\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right) + \Gamma \frac{\left(\Gamma_3 - \Gamma_4\right)^2}{2 - \Gamma\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)}\right]$$

Y operando convenientemente se llega a:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-\Gamma\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{2}\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)}{1 - \frac{1}{2}\Gamma\left(\Gamma_3 + \Gamma_4\right)}$$

Para poder tener el generador canónico adaptado ha de ser el coeficiente de reflexión $\Gamma_{in}=\Gamma^{*}_{g}$ =0. Por lo tanto se debe cumplir que:

$$\Gamma\Gamma_3\Gamma_4=\frac{1}{2}\left(\Gamma_3+\Gamma_4\right)$$

O lo que es lo mismo:

$$\Gamma=\frac{1}{2}\frac{\left(\Gamma_3+\Gamma_4\right)}{\Gamma_3\Gamma_4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Gamma_3}+\frac{1}{\Gamma_4}\right)$$

Y si:

$$\Gamma_3=e^{j\phi_3}$$
$$\Gamma_4=e^{j\phi_4}$$
$$\Gamma=\frac{1}{2}\left(e^{-j\phi_3}+e^{-j\phi_4}\right)$$

Esto siempre es posible excepto si:

$$\left|\Gamma\right|=1$$

Porque entonces la solución lleva a:

$$\Gamma=e^{-j\phi_3}=e^{-j\phi_4}$$

Con lo cual el denominador de b_1 es igual a cero. No se adapta.