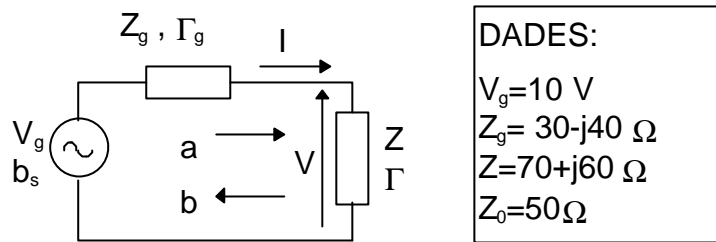


**EXEMPLE DE CÀLCUL D'ONES DE POTÈNCIA**

Pel circuit següent, calcular a, b, V, I, la potència disponible del generador  $P_{av}$  i potència dissipada a la càrrega P:



Els coeficients de reflexió associats a  $Z_g$  i  $Z$  són:

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = 0,5 \angle -90^\circ = -\frac{j}{2} \quad ; \quad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = 0,47 \angle 45^\circ = \frac{(1+j)}{3}$$

**1. Formalisme de tensions i corrents:**

$$V = V_g \frac{Z}{Z + Z_g} = 9,045 \angle 29,3^\circ \text{ V} = 7,8 + j4,42 \text{ V}$$

$$I = V_g \frac{1}{Z + Z_g} = 98,1 \angle -11,31^\circ \text{ mA} = 96,2 - j19,2 \text{ mA}$$

$$P = \frac{1}{2} \Re[VI^*] = 0,3365 \text{ W}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} \Re \left[ \frac{V_g Z_g^*}{Z_g + Z_g^*} \left( \frac{V_g}{Z_g + Z_g^*} \right)^* \right] = \frac{V_g^2}{8 \Re[Z_g]} = 0,417 \text{ W}$$

**2. Formalisme d'ones de potència:**

$$b_s = \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\sqrt{Z_0}} (1 - \Gamma_g) = 0,79 \angle 26,56^\circ \text{ W}^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2} |b_s|^2 = 0,312 \text{ W}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= b_s \frac{1}{1 - \Gamma_g} = 0,93 \angle 15,25^\circ \text{ W}^{1/2} \\ b &= b_s \frac{\Gamma}{1 - \Gamma_g} = 0,44 \angle 60,25^\circ \text{ W}^{1/2} \end{aligned} \right\} \frac{b}{a} = \Gamma = 0,47 \angle 45^\circ$$

$$P = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 = 0,3365 \text{ W}$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} |b_s|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_g|^2} = 0,4167 \text{ W}$$

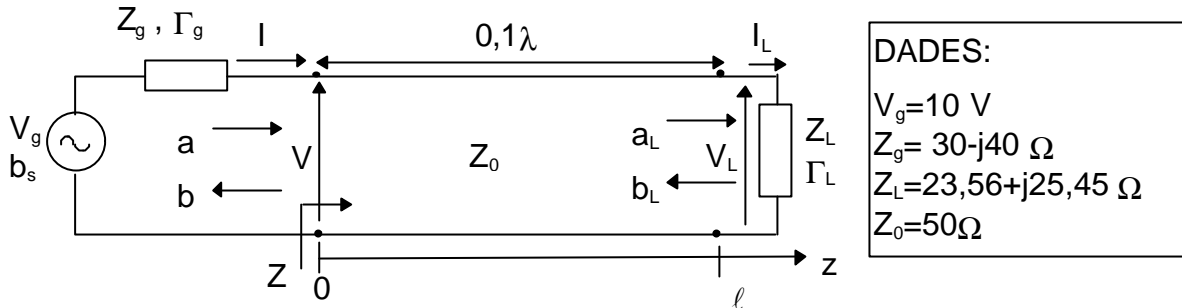
A més, el valor de "a" es pot calcular com:  $a = b_s + \Gamma_g b = 0,93 \angle 15,25^\circ$

La potència associada a l'ona positiva ( $1/2 |a|^2$ ) és més gran que la potència disponible del generador. Això indica que l'ona positiva és, en certa manera,

ficícia, en el sentit que la seva potència no s'està dissipant enlloc. La potència que realment va a la càrrega és  $(1/2|a|^2 - 1/2|b|^2)$ .

### 3. Relació amb les ones de les línies de transmissió

Considerem el circuit, de la figura següent:



El generador és el mateix, per tant  $P_{av}$  és igual a l'anterior (0,4167 W). La impedància d'entrada de la línia és:

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell} = 70 + j60 \Omega$$

que és igual a la impedància  $Z$  del cas anterior. Per tant, els valors de  $V$ ,  $I$ ,  $a$ ,  $b$  i  $P$  són els mateixos. Com que la impedància característica de la línia és igual a la de referència ( $50\Omega$ ), les ones de tensió a la línia en  $z=0$  són:

$$V^+ = a\sqrt{Z_0} = 6,58 \angle 15,25^\circ \text{ V} \quad ; \quad V^- = b\sqrt{Z_0} = 3,1 \angle 60,25^\circ \text{ V}$$

En el punt  $z=\ell=0,1\lambda$  tindrem:

$$V_L = V(\ell) = V^+ e^{-j\beta \ell} + V^- e^{j\beta \ell} = 5,861 \angle 7,37^\circ \text{ V}$$

$$I_L = I(\ell) = \frac{1}{Z_0} (V^+ e^{-j\beta \ell} - V^- e^{j\beta \ell}) = 0,169 \angle -39,83^\circ \text{ A}$$

i per tant:

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = 23,56 + j25,45 \Omega \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2} \Re[V_L I_L^*] = 0,3365 \text{ W}$$

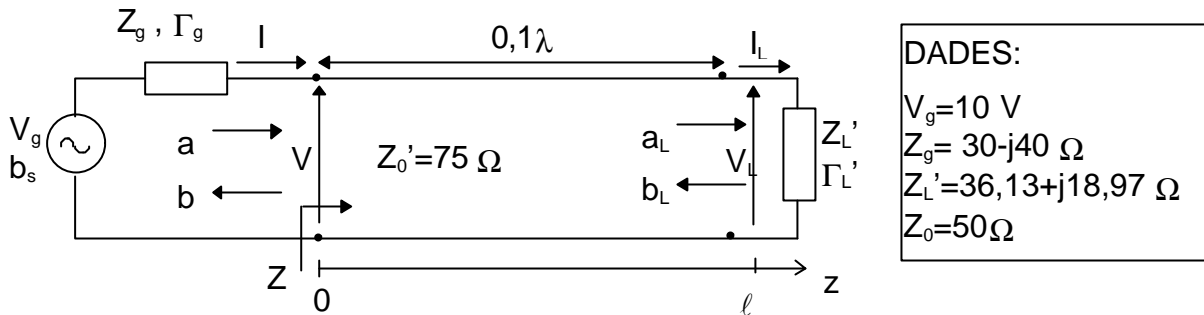
Com es veu, la potència que dissipa la càrrega és la mateixa que la que proporciona el generador. Això és perquè la línia no té pèrdues. Els valors de les ones  $a$  i  $b$  a la càrrega són:

$$a_L = \frac{1}{2} \left( \frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} + I_L \sqrt{Z_0} \right) = 0,93 \angle -20,74^\circ = \underline{\underline{a e^{-\beta \ell}}}$$

$$b_L = \frac{1}{2} \left( \frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} - I_L \sqrt{Z_0} \right) = 0,44 \angle 96,25^\circ = \underline{\underline{b e^{j\beta \ell}}}$$

#### 4. Cas de la línia d'impedància característica diferent

Ara considerem el mateix cas, però de manera que la línia tingui una impedància característica  $Z_0'$  diferent de la de referència:



El generador és el mateix, per tant  $P_{av}$  és igual a l'anterior (0,4167 W). La impedància d'entrada de la línia és:

$$Z = Z_0' \frac{Z_L' + jZ_0' \tan \beta l}{Z_0' + jZ_L' \tan \beta l} = 70 + j60 \Omega$$

Com que és la mateixa que en els casos anteriors, els valors de  $V$ ,  $I$ ,  $a$ ,  $b$  i  $P$  també ho seran. Aquí podem definir dos coeficients de reflexió per un mateix valor d'impedància:

$$\rho = \frac{Z - Z_0'}{Z + Z_0'} \quad i \quad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

El primer ( $\rho$ ) és la relació entre les ones  $V^-$  i  $V^+$  que viatgen per la línia. El segon ( $\Gamma$ ) és la relació entre les "ones"  $b$  i  $a$ . Calculem les diferents ones:

$$\rho_g = \frac{Z_g - 75}{Z_g + 75} = 0,536 \angle -117,51^\circ ; \quad \rho = \frac{Z - 75}{Z + 75} = 0,384 \angle 72,28^\circ$$

$$V_s = V_g \frac{Z_0'}{Z_0' + Z_g} = 6,67 \angle 20,85^\circ \text{V}$$

$$V^+ = V_s \frac{1}{1 - \rho_g \rho} = 7,69 \angle 11,17^\circ \text{V} ; \quad V^- = V_s \frac{\rho}{1 - \rho_g \rho} = 2,95 \angle 83,45^\circ \text{V}$$

Cal notar que les ones positiva i negativa normalitzades **no** són igual a  $a$  i  $b$ :

$$\frac{V^+}{\sqrt{75}} = 0,88 \angle 11,17^\circ \neq a ; \quad \frac{V^-}{\sqrt{50}} = 1,088 \angle 11,17^\circ \neq a$$

La potència que propaga la línia és:

$$P = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{75} - \frac{1}{2} \frac{|V^-|^2}{75} = 0,3365 \text{ W}$$

que és la mateixa que proporciona el generador. Ara calculem la tensió i corrent als extrems de la línia:

## MICROONES

$$V = V(0) = V^+ + V^- = 9,04 \angle 29,29^\circ \text{ V}$$

$$I = I(0) = \frac{1}{Z_0'} (V^+ - V^-) = 0,098 \angle -11,31^\circ \text{ A}$$

$$V_L = V(\ell) = V^+ e^{-j\beta\ell} + V^- e^{j\beta\ell} = 5,57 \angle 6,81^\circ \text{ V}$$

$$I_L = I(\ell) = \frac{1}{Z_0'} (V^+ e^{-j\beta\ell} - V^- e^{j\beta\ell}) = 0,136 \angle -34,52^\circ \text{ A}$$

d'on es pot deduir la impedància de càrrega, així com la potència que dissipa:

$$Z_L' = \frac{V(\ell)}{I(\ell)} = 36,13 + j18,97 \Omega \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2} \Re[V(\ell) I(\ell)^*] = 0,3365 \text{ W}$$

que són coherents amb els valors inicials. La potència continua sent la mateixa que la que lliura el generador. Finalment, podem encara calcular els valors de  $a$  i  $b$  en bornes de la impedància de càrrega:

$$a_L = \frac{1}{2} \left( \frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} + I_L \sqrt{Z_0} \right) = 0,85 \angle -22,10^\circ \neq \underline{\mathbf{a e^{-j\beta\ell}}}$$

$$b_L = \frac{1}{2} \left( \frac{V_L}{\sqrt{Z_0}} - I_L \sqrt{Z_0} \right) = 0,227 \angle 91,64^\circ \neq \underline{\mathbf{b e^{j\beta\ell}}}$$

i, òbviament, es compleix :

$$\Gamma_L = \frac{b_L}{a_L} = 0,2665 \angle 113,73^\circ \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2} |a_L|^2 - \frac{1}{2} |b_L|^2 = 0,3365 \text{ W}$$