Transformada de Laplace

Definición: $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

Pares de Transformadas de Laplace		
Señal	***f*(*t*)**	**F(*s*)**
Impulso	$\delta(t)$	1
Escalón	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampa	$t u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Exponencial	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
Rampa amortiguada	$te^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
Senoide	$\mathrm{sen}\beta t\ u(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
Cosenoide	$\cos\beta t\ u(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
Senoide amortiguada	$e^{-\alpha t}\ \mathrm{sen}\beta t\ u(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
Cosenoide amortiguada	$e^{-\alpha t}\ \cos\beta t\ u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

Propiedades de la Transformada de Laplace		
Propiedad	**Dominio temporal (*t*)**	**Dominio Frecuencial (*s* = *s*+j*w*)**
Linealidad	$Af_1(t)+Bf_2(t)$	$AF_1(t)+BF_2(t)$
Integración	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
Derivación	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$
Desplazamiento frecuencial	$e^{-at}f(t)$	$F(s+\alpha)$
Desplazamiento temporal	$f(t-\alpha)u(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}F(s)$
Escalado temporal	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$

Teorema del valor inicial: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Teorema del valor final: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Transformada inversa de Laplace

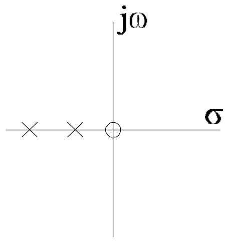
Definición: $f(t) = \dfrac{1}{2pj}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$

Transformada inversa de funciones racionales

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Factorización según polos y ceros: $F(s) = K\,\dfrac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$ donde z_i = ceros y p_i = polos

Diagrama polo-cero



$$F(s) = K\,\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Funciones racionales propias: *n*>*m*

Polos simples

Factorización del denominador: $F(s) = \dfrac{1}{a_n}\dfrac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \dfrac{1}{a_n}\dfrac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$

Descomposición en fracciones parciales: $F(s) = \dfrac{A_1}{(s-p_1)} + \dfrac{A_2}{(s-p_2)} + \ldots + \dfrac{A_n}{(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{A_i}{(s-p_i)}$

donde A_i son los residuos y se calculan: $A_i = (s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$

Transformada inversa: $f(t) = \left(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots + A_n e^{p_n t}\right)\cdot u(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t}u(t)$

Polos complejos conjugados: $p_1 = -a + jb$ y $p_2 = -a - jb$

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(s-p_i)} = \ldots + \frac{k}{(s+a-jb)} + \frac{k^*}{(s+a+jb)} + \ldots \text{con } k = (s+a-jb)F(s)\big|_{s=-a+jb} = |k|e^{jJ}$$

$$f(t) = \ldots + 2|k|e^{-at}\cos(bt+J)u(t) + \ldots$$

Polos múltiples

Factorización del denominador: $$F(s) = \frac{1}{a_n} \frac{N(s)}{(s-p_0)^r \prod_{i=1}^{n-r} (s-p_i)}$$

Descomposición en fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{A_{n-r}}{(s-p_{n-r})} + \frac{B_1}{(s-p_0)} + \frac{B_2}{(s-p_0)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(s-p_0)^r} = \sum_{i=1}^{n-r} \frac{A_i}{(s-p_i)} + \sum_{j=1}^{r} \frac{B_j}{(s-p_0)^j}$$

donde los residuos correspondientes al polo múltiple se calculan según: $B_j = \frac{1}{(r-j)\,!} \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} \left[(s-p_0)^r F(s) \right] \Bigg|_{s=p_0}$

Polo doble

$$F(s) = \frac{1}{a_n} \frac{N(s)}{(s-p_1)\ldots(s-p_{n-2})(s-p_0)^2} = \frac{A_1}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{(s-p_{n-2})} + \frac{B_1}{(s-p_0)} + \frac{B_2}{(s-p_0)^2}$$

Funciones racionales impropias: *n£m*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = C(s) + \frac{R(s)}{D(s)} = C(s) + F'(s)$$

donde *C(s)* es un polinomio de grado m-n: $C(s) = c_{m-n} s^{m-n} + c_{m-n-1} s^{m-n-1} + \ldots + c_1 s + c_0$

y *F'(s)* es una función racional propia de s.

$$f(t) = c(t) + f'(t) = c_{m-n} \frac{d^{m-n} d(t)}{dt^{m-n}} + c_{m-n} \frac{d^{m-n-1} d(t)}{dt^{m-n-1}} + \ldots + c_1 \frac{dd(t)}{dt} + c_0 d(t) + f'(t)$$